# Session de Septembre 2001

*Examen du 6 Septembre 2000, 10H30-12H30*
*Amphithéatre 1 Bâtiment U1*

**Questions de Cours :**

Note : dans chaque cas on sera *TRÈS* attentif à donner la définition de tous les termes et symboles utilisés.

1. Multiplicateurs de Lagrange

   On considère un cerceau de rayon $R$ mis en rotation par rapport à son diamètre vertical à la vitesse angulaire constante $\omega$. On notera $(\rho,\ \phi,\ z)$ le système de coordonnées cylindriques adapté au problème et $\mathbf{g}$ l'accélération de la pesanteur. Un anneau, assimilé à un point matériel de masse $m$ est assujetti à se déplacer sans frottements sur ce cerceau.

   (a) Quelle est l'énergie potentielle totale du point matériel ?

   (b) Trouvez, à l'aide de la méthode des mutiplicateurs de Lagrange, la position d'équilibre de l'anneau ?

   Soit $\Omega$ l'ensemble des micro-états accéssibles à un système et $q$ un micro-état de probabilité $p(q)$.

   (c) À quelles conditions $p$ est-elle une loi de probabilité sur $\Omega$ ? Quelle est alors l'entropie statistique $s(p)$ associée à l'état macroscopique défini par $p$. Soit $O$ une observable quelconque du système ; quelle est la valeur moyenne $\langle O\rangle_p$ de cette observable sur l'état macroscopique considéré ?
   On considère un système en contact avec un thermostat. Soit $E = \langle U\rangle_p$ la valeur moyenne de son énergie.

   (d) Quelles sont les deux contraintes que doit désormais verifier la distribution de probabilité $p$ ? Introduire alors une fonction $F(p)$ permettant de trouver l'extremum de l'entropie $s(p)$ *compte tenu des contraintes précédentes* à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On notera $\lambda_0$ et $\lambda_E$ les deux multiplicateurs nécéssaires.

   (e) En déduire l'état de Gibbs du sytème $\mathbb{P}(q)$.

   (f) Identifiez alors la fonction de partition $\mathcal{Z}$ du problème. On sait par ailleurs que, si $T$ est la température du thermostat, la probabilité d'observer un état d'énergie $\epsilon$ est proportionnelle à $e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}$ (facteur de Boltzman). En déduire l'expression de $\lambda_E$.

2. Équation de Boltzman

   (a) Donnez l'expression générale de l'équation de Boltzman en détaillant la signification de chaque terme.

(b) En quoi consiste "l'hypothèse du temps de relaxation" que l'on notera $\tau = 1/\mathcal{W}$ ? Quel développement fait-on dans la méthode de Chapman-Enskog ? On se place en absence de champ extérieur ; en déduire, au premier ordre, l'expression de la densité monoparticulaire $f$. Quels sont alors les courants de particule $\mathbf{j}_n$ et d'énergie $\mathbf{j}_U$ associés ?

**Problème :** EFFETS THERMOGALVANOMAGNÉTIQUES

On notera $\vec{J}_q$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\mathcal{V}$, $\vec{J}_{el}$ et $T$ respectivement les densités volumiques de courant de chaleur, le champ électrique dérivant du potentiel $\mathcal{V}$, la densité volumique de courant électrique et la température. De même, on notera $L_{qq}$, $L_{qn}$, $L_{nq}$ et $L_{nn}$ les coefficients de réponse linéaire liant les densités volumiques de courant de chaleur et électrique aux gradients adéquats de température et potentiel électrique.

## I)- Reformulation des effets Thermoélectriques :

I-1) Rappellez la forme des équations de réponse linéaire pour que l'on ait $L_{qn} = L_{nq}$.

I-2) Le système étant linéaire et comme on peut exprimer $\vec{\nabla}T^{-1}$ en fonction de $T$ et $\vec{\nabla}T$, on peut faire un "changement de base" vers des grandeurs plus faciles à mesurer experimentalement. Exprimer par exemple $\vec{J}_q$ et $\vec{E}$ et fonction de $\vec{\nabla}T$ et $\vec{J}_{el}$. On notera $\lambda$, $\pi$, $\epsilon$ et $\rho$ les coefficients phénoménologiques qui apparaissent, dont on donnera la signification. On les reliera alors aux coefficients de réponse linéaire introduits au I-1).

## II)- Effets Thermogalvanomagnétiques :

On va s'interesser aux conséquences de l'application d'un champ magnétique statique $\vec{B} = B\vec{e_z}$ sur les effets thermoélectriques. Le milieu considéré sera supposé isotrope et NON MAGNETIQUE, c'est à dire qu'il ne présentera pas de moment magnétique ni permanent, ni induit.

II-1) Quel est le travail (ou la puissance) de la force magnétique ? Doit-on en conséquence modifier la différentielle de l'énergie interne ?

II-2) En déduire l'expression du taux volumique de création d'entropie en fonction des densités volumiques de courant de chaleur et électrique.

II-3) À des fins de généralité et pour alléger les notations on ecrira les relations de réponse linéaire sous la forme $\vec{J} = \underline{L}\vec{X}$. Identifier alors les "$\vec{J}$", "$\underline{L}$" et "$\vec{X}$" introduits au I-2).

Nous allons maintenant étudier les propriétés de symétrie des tenseurs $\underline{L}$.

II-4) D'après l'isotropie du milieu en l'absence du champs magnétique, comment sont reliés les termes diagonaux $L_{ii}$ ? On notera alors $L_d$ le coefficient qui apparait. Que deviennent les $L_{ii}$ lorsque l'on applique le champs magnétique $\vec{B}$ ? On admettra par la suite, avec un champ magnétique appliqué, tous les termes diagonaux sont égaux.

II-5) On admettra que le tenseur $\underline{L}$ se transforme dans une transformation quelconque ayant pour opérateur de transformation $\Theta$ comme $\underline{L}' = \Theta\underline{L}\Theta^{-1}$. Vu l'isotropie du milieu, une rotation d'un angle $\theta$ quelconque autour du champ magnétique laisse le système invariant. Quel est l'opérateur $\Theta_\theta$ associé à cette rotation ? En déduire la valeur de $L_{xz}$, $L_{yz}$, $L_{zx}$ et $L_{zy}$, et la relation entre $L_{xy}$ et $L_{yx}$. On notera alors $L_{nd}$ pour $L_{xy}$ et on donnera l'expression de la matrice $(L)$ qui représente le tenseur $\underline{L}$ dans la base $(x, y, z)$ .

II-6) Comment se transforme le champ $\vec{B}$ dans la rotation d'angle $\pi$ autour de l'axe $\vec{e_x}$ ? En remarquant que :

$$\underline{L}'(-\vec{B}) = \underline{L}(\vec{B})$$

où $\underline{L}'(-\vec{B})$ est la transformée du tenseur $\underline{L}(-\vec{B})$ dans la rotation d'angle $\pi$ autour de l'axe $\vec{e_x}$ : $\underline{L}'(-\vec{B}) = \Theta_x(\pi)\underline{L}(-\vec{B})\Theta_x^{-1}(\pi)$, déduire un développement en puissance de $B$ des coefficients $L_d$ et $L_{nd}$ (les deux premiers termes non nuls du developpement suffiront).

Nous avons donc montré que :

$$\begin{pmatrix} L_d(\vec{B}) & L_{nd}(\vec{B}) & 0 \\ -L_{nd}(\vec{B}) & L_d(\vec{B}) & 0 \\ 0 & 0 & L_d(\vec{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d(-\vec{B}) & -L_{nd}(-\vec{B}) & 0 \\ +L_{nd}(-\vec{B}) & L_d(-\vec{B}) & 0 \\ 0 & 0 & L_d(-\vec{B}) \end{pmatrix}$$

d'après de simples arguments de symétrie. Cela est à rapprocher des relations de réciprocité de Onsager.

**III- Effet Hall :**

On considère que l'échantillon introduit dans la partie II) est de plus à température uniforme et que l'on impose à l'aide d'un générateur un courant uniforme $\vec{J_{el}} = J_{el}\vec{e_x}$. On supposera de plus que les faces de l'échantillon orthogonales à la direction $y$ sont isolées l'une de l'autre.

III-1) On considère dans un premier temps la réponse électrique du système soit, comme dans la partie I), $\vec{J} = \vec{E}$. À quoi s'identifie alors la matrice $(L)$ introduite ci-dessus ?

III-2) En déduire que le champ électrique $\vec{E}$ présente a priori deux composantes : une 'habituelle', dans la direction du courant $(x)$, et une nouvelle, orthogonale à la précédent apellée champ de Hall, $E_H$.

III-3) En déduire, d'après la question II-6), que pour un champ magnétique suffisamment faible, la mesure du champ de Hall donne une mesure directe du champ magnétique.

III-4) Quelle est la première correction qui apparait aux champs magnétiques plus importants ? On appelle cet effet magnétorésistance.