Jean Bellissard
Renaud Mathevet
Mohamed Belkacem

Université Paul Sabatier,
UM2
Maîtrise de Physique

Phénomènes irréversibles

Troisième partie : Diffusion de la chaleur *(d'après [1] Ch.10, [2] Ch.III)*

Exercice 3.1 : Equation de la chaleur

Lorsque l'on chauffe localement un fluide (ou un solide) on constate expérimentalement qu'après un certain temps, la température tend à s'uniformiser. Cette homogénéisation se fait grâce à l'apparition de courants de chaleur (ou d'énergie thermique) J_{th} qui vont transporter l'énergie thermique des zones excédentaires vers les zones déficitaires. On notera u la densité volumique d'énergie thermique et T la température.
a) Soit v_m la vitesse moyenne du fluide et v la vitesse d'une particule. Quelle est la valeur moyenne de l'énergie cinétique des particules ?. Distinguer alors deux contributions, une macroscopique et l'autre microscopique que l'on reliera la densité volumique d'énergie thermique et à la densit volumique de particules n_v.
b) Rappelez la loi de Fourier et donnez ses limitations. On notera λ le coefficient qui apparait. Quelle est sa dimension ? On donne $\lambda \approx 24\,10^{-3}$ SI, 1 SI et 400 SI pour respectivement l'air, les matériaux usuels de construction et les métaux bons conducteurs.
c) Etablir l'équation de continuité de la chaleur.
d) Donnez une cause de non conservation de l'énergie thermique. Introduisez alors un taux volumique de production d'énergie thermique dans l'équation de continuité.
e) Déduire l'équation de la chaleur de l'équation de continuité et de la loi de Fourier. On supposera l'évolution de l'échantillon isochore et on introduira ρ, c_v et $a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$ la masse volumique, la capacité thermique massique à volume constant [1] et la diffusivité thermique du matériau.
f) Quelle est la dimension de la diffusivité thermique ? Analogies et différences avec la diffusion de particules. On donne $a \approx 10^{-1}$ SI et 100 SI pour respectivement les matériaux usuels de construction et les métaux bons conducteurs

Exercice 3.2 : solutions en régime stationnaire

On considère desormais une barre solide, de diamètre D très inférieur à sa longueur L soumise à aucun champ extérieur.
a) Justifier alors que le terme de production est nul et donnez, en tenant compte de la géométrie du système, l'équation à laquelle satisfait la température.
b) Rappellez la solution générale qui en a été donnée au TD précédent. D'après la dimension de la diffusivité thermique, quel est l'ordre de grandeur du temps nécessaire au retour à l'équilibre thermique de la barre ? Jusitifiez alors l'approximation à une dimension faite au a).
c) Que devient, en toute généralité, l'équation de la chaleur en régime stationnaire ? Analogie avec l'électrostatique.
d) Résoudre l'équation établie au a) dans le cas stationnaire si les extrémités de la barre sont maintenues à des températures T_0 et T_1. Quelle est alors la densité volumique de

[1] ou encore capacité calorifique massique à volume constant et parfois chaleur massique à volume constant. C'est la quantité d'énergie qu'il faut fournir à une unité de masse pour élever sa température de un degrés.

courant thermique et le flux de chaleur qui tranverse la barre.
e) Par analogie avec l'électrocinétique, le flux de chaleur est parfois appelé intensité thermique, noté I_{th} et, le rapport de la différence de températures $\Delta T = T_0 - T_1$ sur l'intensité thermique, résistance thermique notée R_{th}. Exprimez la résistance thermique de la barre en fonction de ses paramètres géométriques et de sa conductivité thermique. Analogie avec la résistance électrique d'un fil.
f) Quelle est la résistance thermique d'une association de résistances thermiques en paralèle ? en série ? Application à l'isolation des habitations.

Exercice 3.3 : solution en régime forcé

L'équation de la chaleur est une équation linéaire. On peut donc, pour la résoudre lui appliquer les techniques habituelles à savoir (i) passage en complexes et (ii) décomposition de la solution en ondes planes (Transformée de Fourier !). On est donc ammené à rechercher des solutions de la forme $\theta(x,t) = \theta_0 exp[j(kx - \omega t)]$. En fait, nous admettrons que k et ω soient complexes de sorte que l'on a affaire à une généralisation de la Transformée de Fourier appelée Transformée de Laplace.
a) Nous allons soumettre une extrémité du système à une perturbation périodique de période τ, d'amplitude ΔT autour d'une valeur moyenne T_0. A partir d'un argument dimensionnel, donnez la profondeur l jusqu'à laquelle se propage cette perturbation.
b) Résoudre l'équation de la chaleur avec la technique proposée dans la limite d'un milieu infini. En déduire l'équation de dispersion du milieu qui relie k et ω. On n'oubliera pas de rajouter une solution particulière.
c) Introduire alors la profondeur de pénétration δ et la comparer avec le résultat obtenu par analyse dimensionnelle. A quelle condition(s) l'approximation du milieu infini est-elle justifiée ?
d) Evaluer quantitativement la profondeur de pénétration dans le cas du sol ($a = 0.3\,10^{-6}$SI) pour les fluctuations quotidiennes et annuelles de température. Conclure quant à l'utilité d'une cave. Analogie avec l'effet de peau rencontré en électromagnétisme.

NB : en toute rigueur, 'λ' est le coefficient de proportionnalité entre deux vecteurs : c'est donc un tenseur de rang deux dont l'expression dans une base cartésienne est une matrice 3×3. Nous ne considèrerons que des matériaux isotropes pour lesquels ce tenseur est proportionnel à l'identité, le coefficent de proportionnalité étant précisément le scalaire λ. Connaissez-vous un exemple où cette appoximation n'est pas justifiée ?

Références

[1] J. Ph. Pérez & A. M. Romulus, *Thermodynamique, Fondements et Applications*, Masson Ed., Paris, (1993).

[2] Ch. Vidal, G. Dewel & P. Borckmans, *Au-delà de l'équilibre*, Hermann, Paris, (1994).