Jean Bellissard
Renaud Mathevet
Mohamed Belkacem

Université Paul Sabatier,
UM2
Maîtrise de Physique

Phénomènes irréversibles

Cinquième partie : Mouvement Brownien

Dans le modèle de la marche au hazard du mouvement Brownien, on ne se pose aucune question sur la nature du mouvement de la particule (sa dynamique) ni sur la nature de ses interactions avec le milieu environant : le mouvement est traité comme un pur processus stochastique c'est à dire la donnée, en fonction d'un paramètre (le temps par exemple), d'une variable aléatoire (la position de la particule ici). Ce processus est alors décrit par les propriétés statistiques que l'on donne à la variable aléatoire et l'intervention du physicien se résume à choisir des propriétés 'raisonnables'.

Exercice 5.1 : Marche au hasard *(d'après [3] Ch.3, [2] Complément I.D et [4] Ch. 1)*

I On considère le cas le plus simple d'un marcheur se déplaçant sur un axe x, avec des pas identiques de longueur l, la direction du pas étant aléatoire avec des probabilités p_+ et p_- de choisir des directions x positif ou négatif. Soient n_+, n_- les nombres de pas dans les directions x positif et négatif et n le nombre de pas total.
a) Quelle est la longueur totale du trajet ? Quelle est la distance $d = sl$ du marcheur à l'origine ?
b) On prend l'exemple dans lequel le marcheur a fait 3 pas et se trouve à la position $+l$ sur l'axe. De combien de façons a-t-il pu y parvenir ? Que se passe-t-il s'il fait 4 pas ?
c) En déduire $P(n, s)$ la probabilité pour qu'après avoir fait n pas, le marcheur soit à la distance d de l'origine.
d) Calculez alors la moyenne et l'écart type de d. Application au cas où $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$. En supposant que ce sont des collisions qui sont responsables des changements de directions, exprimez les résultats en fonction du temps écoulé t, du libre parcours et du temps moyen de collision.

II Critique du modèle.
Pour tenir compte de la longueur différente des pas, on peut remarquer que la distance x parcourue en n pas est la somme des longueurs x_i des différents pas. Ces pas étant de longueur aléatoire et décorrélés, les x_i sont des variables aléatoires indépendantes.
e) En utilisant le théorème de la limite centrale [1] et commentant ses conditions de validité, en déduire la densité de probabilité $P(n, x)$ pour qu'après n pas le marcheur soit à la distance x de l'origine. On rappelle que la longueur moyenne des pas est notée l et on notera δl la dispersion en longueur des pas. On donne pour l'expression de la gaussienne normée, centrée en x_0 et de largeur Σ :

$$G_{x_0,\Sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Sigma^2}}.$$

III À trois dimensions

[1] Théorème de la limite centrale : La distribution de probabilité $w(X)$ de la somme $X = \sum_{i=1}^{N} x_i$ où les x_i sont N variables aléatoires indépendentes, avec $N >> 1$ est une gaussienne centrée en $x_0 = \sum_{i=1}^{N} \overline{x_i}$ et de largeur σ telle que $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \overline{\Delta x_i^2}$.

Pour le passage à trois dimensions, nous passerons en coordonnées sphériques r, θ, ϕ.
f) Quelle est la forme de la probabilité $dP(r, \theta, \phi)$ de faire un pas de longueur r à dr près dans une direction (θ, ϕ) à $(d\theta, d\phi)$ près. Introduire l'angle solide élémentaire $d\Omega$.
g) On considérera le cas isotrope. Conséquences pour dP.
h) Que valent les valeurs moyennes et écart types des projections d'un pas sur les axes cartésiens x, y et z en fonction de la longueur moyenne d'un pas l ? Conclure à l'aide de d).

Exercice 5.2 : Analyse harmonique de l'équation de Langevin *(d'après [4] Ch. 1.3)*

Dans le modèle de Langevin du mouvement Brownien, on traite explicitement le mouvement de la particule. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ *sa position et sa vitesse. L'interaction avec le milieu est modélisée par une force* $\mathbf{F}$ *que l'on décompose en deux parties : une force moyenne (dans un sens à définir) que l'on modélise par un frottement visqueux* $\mathbf{F}_v = -m\gamma\mathbf{v}$*, et une force fluctuante* $\mathbf{L}(t)$ *que l'on modélise par une force aléatoire indépendante du mouvement de la particule. Au besoin, on rajoute les forces qui dérivent de potentiels extérieurs (cf. 5.2.k). Nous allons introduire une méthode complémentaire à celle vue en cours pour étudier les équations de Langevin.*

a) Écrire l'équation de Langevin dans le cas général et la simplifier en considérant que les champs extérieurs sont nuls. Cette équation est **linéaire** aussi une analyse de Fourier est elle particulièrement bien adaptée.

Puisque la force $\mathbf{L}(t)$ *est une force stochastique, la position* $\mathbf{x}(t)$ *et la vitesse* $\mathbf{v}(t)$ *de la particule sont aussi des processus stochastiques. Supposons que nous observions la particule : on obtient des echantillons* $L(t)$*,* $x(t)$ *et* $v(t)$ *des processus précédents. Soit* $\mathbf{z}(t)$ *un des processus stochastiques précédents et* $z(t)$ *l'échantillon correspondant.*

b) Quelle est la transformée de Fourier de $z(t)$? Comment s'exprime inversement $a_z(\omega)$ le spectre de $z(t)$. Introduire alors la décomposition de Fourier du processus stochastique lui-même : le spectre de Fourier $\mathbf{a}_z(\omega)$ est alors une fonction aléatoire dont $a_z(\omega)$ est un échantillon.

c) Comment s'exprime la densité spectrale de puissance $I_{\mathbf{z}}(\omega)$ en fonction de $\mathbf{a}_{\mathbf{z}}(\omega)$?

d) De l'équation de Langevin, tirer une relation entre les spectres de Fourier de la vitesse $\mathbf{a}_{\mathbf{v}}(\omega)$ et de la force de Langevin $\mathbf{a}_{\mathbf{L}}(\omega)$. En déduire celle qui existe entre les densités spectrales de puissance de la vitesse, $I_{\mathbf{v}}(\omega)$, et de la force de Langevin, $I_{\mathbf{L}}(\omega)$.

Ici nous intervenons pour spécifier la nature de la force fluctuante et nous faisons l'hypothèse la plus simple : $I_{\mathbf{L}}(\omega) = constante = I_{\mathbf{L}}$*. Un tel bruit est qualifié de bruit blanc.*

e) Montrer qu'à cause de l'inertie de la particule, son spectre de vitesse n'est pas blanc : l'inertie filtre les hautes fréquences. De plus, un bruit blanc n'est pas physique car il contient une énergie infinie, il y a toujours une certaine pulsation de coupure ω_b dans le spectre du bruit. A quelle condition un modèle en bruit blanc est-il acceptable. On supposera cette condition verifiée par la suite.

Il ne reste plus qu'à revenir dans l'espace réel. Se pose alors la question du sens à donner à la transformée de Fourier (inverse) d'une densité spectrale de puissance. On montre que si on introduit la fonction d'autocorrélation du processus stochastique $\mathbf{z}(t)$, $\phi_{\mathbf{z}(t)} = \langle z(t_0) z(t_0 + t) \rangle$ *alors on a le théorème de* Wiener-Khintchine :

$$\phi_{\mathbf{z}(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, I_{\mathbf{z}}(\omega) e^{i\omega t} \;\; \textit{et inversement} \;\; I_{\mathbf{z}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \phi_{\mathbf{z}}(t) e^{-i\omega t}$$

fonction d'autocorrélation et densité spectrale de puissance sont transformées de Fourier l'une *de l'autre (cf. cohérence temporelle en optique).* [2]

f) Quelle est la fonction d'autocorrélation $\phi_{\mathbf{L}}$ du bruit blanc ? Quelle interprétation en donneriez-vous ?

g) Quelle est la fonction d'autocorrélation $\phi_{\mathbf{v}}$ de la vitesse ?

h) En déduire la vitesse quadratique moyenne de la particule $< v^2 >$. Par ailleurs, que vaut-elle si on suppose que la particule est thermalise avec le milieu de température T ? En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance du bruit en fonction de la température, puis l'expression de la fonction d'autocorrélation de la force fluctuante. On vient de relier l'intensité de la force fluctuante au coefficient de friction du milieu : c'est la forme la plus simple du théorème général de Fluctuation-Dissipation.

i) En reprennant la démarche effectuée pour la vitesse, donnez rapidement la densité spectrale de puissance de la position $I_{\mathbf{x}}$. Pourquoi ne peut-on alors en déduire de la fonction d'autocorrélation de la position ? La méthode du cours est alors parmi les plus directes pour montrer que le mouvement est de type diffusif c'est à dire que $< x^2(t) >= 2Dt$ pour $t \gg 1/\gamma$ (à une dimension, D coefficient de diffusion).

j) La méthode exposée ici garde toutefois son interêt lorsque l'on a besoin seulement de la vitesse. Par exemple : considérons un circuit électrique formé d'un élément résistif de résistance R et d'un condensateur de capacité C. Quelle est l'équation électrique du circuit ? Faire alors l'analogie avec celle de la particule ci-dessus. Quelle est l'énergie stoquée dans le condensateur et que vaut-elle à l'équilibre thermique à la température T ? En déduire la densité spectrale de bruit du courant dans le circuit. D'après le théorème Fluctuation-Dissipation, quel est l'élément source de ce bruit ?

k) On peut encore utiliser cette méthode, pour déterminer la position de la particule, si l'on sait que celle-ci est une variable stationnaire. C'est par exemple le cas si on consid 'ere un oscillateur harmonique de fréquence propre ω_0. Écrire l'équation de Langevin dans ce cas et en déduire la densité spectrale de puissance de la position $I_{\mathbf{x}}(\omega)$. Le mouvement reste cette fois borné et l'on peut appliquer le théorème de Wiener-Khintchine. En déduire la fonction d'autocorrélation de la position $\phi_{\mathbf{x}}(t)$. À l'aide de la valeur de $I_{\mathbf{L}}$ déterminée précédement, montrer que l'on retrouve alors le théorème d'équipartition de l'énergie. On peut ainsi étudier le mouvement Brownien du miroir d'un galvanomètre soumis au chocs du gaz environant.

Références

[1] Constantes fondamentales et relations utiles

- $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-px}\, p dx = p^{-n}\Gamma[1+n] = p^{-n} n!$ si $n \in \mathbb{N}$
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\gamma\|t\|}}{\gamma}$
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-x_0^2)^2+a^2x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ax_0^2}(\cos(x_1 t) + \frac{a}{2x_1}\sin(x_1 t))e^{-at/2}$ $(t > 0, x_1^2 = x_0^2 - a^2/4)$

[2] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, *Physique Statistique*, Hermann, Paris, (1989).

[3] J. Ph. Pérez & A. M. Romulus, *Thermodynamique, Fondements et Applications*, Masson Ed., Paris, (1993).

[4] R. Kubo, M. Toda & N. Hashitsume, *Statistical Physics II*, Springer-Verlag, Berlin, (2^{nd} edition, 1991).

[2]une hypothèse supplémentaire ici est nécéssaire : il faut que le processus soit stationnaire c'est à dire que ses propriétés statistiques ne dépendent pas du temps, notamment de l'instant initial t_0 choisi pour évaluer sa fonction d'autocorrélation.