Jean Bellissard
Renaud Mathevet
Mohamed Belkacem

Université Paul Sabatier,
UM2
Maîtrise de Physique

Phénomènes irréversibles

Septième partie : Équations de Lorentz et de Boltzmann

Exercice 7.1 : régime ballistique et régime d'équilibre local (*d'après [1] Ch. 15*)

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Lorentz c'est-à-dire celui d'un gaz de particules sans interactions mutuelles interagissant avec des centres diffuseurs fixes (inifiniment lourds) disposés au hazard. Nous allons préciser l'existance de deux régimes dans l'évolution du gaz vers l'équilibre. On notera $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ la densité monoparticulaire.

a) On se place dans le cas où il n'y a pas de collisions et où la particule est soumise à un champ de forces exterieur $\vec{F}$. Si on observe une particule de masse m au temps $t + dt$ à la position $\vec{r}$ avec une impulsion $\vec{p}$, où était-elle et quelle était son impulsion au temps t ? En déduire l'expression de la dérivée totale par rapport au temps de la densité monoparticulaire.

b) Si désormais on prend en compte les collisions, justifiez que cette dérivée totale ne soit pas nulle. On la posera égale à $I_{coll.}(f)$.

c) On a montré en cours que

$$I_{coll.}(f) \;=\; \int d^3\vec{p'}\; \Big[f(\vec{r}, \vec{p'}, t) - f(\vec{r}, \vec{p}, t) \Big] \; W(\vec{p}, \vec{p'}) \; \delta \left(\frac{\vec{p'}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^2}{2m} \right)$$

Interprétez les différents termes et notamment leur signe.

d) Pourquoi a-t-on $W(\vec{p}, \vec{p'}) = W(\vec{p'}, \vec{p})$? On montre par ailleurs que

$$W(\vec{p}, \vec{p'}) \;=\; \frac{1}{m^2}\, n_{cd}\, \frac{d\sigma}{d\omega}(\vec{p}, \vec{p'})$$

où n_{cd} est la densité volumique de centres diffuseurs et m la masse des particules. Que représente $\frac{d\sigma}{d\omega}(\vec{p}, \vec{p'})$? De plus, lors de la collision sur un centre infiniment lourd, quelle(s) relation(s) lie(nt) $\vec{p}$ à $\vec{p'}$? En déduire que $W(\vec{p}, \vec{p'}) = W(p, \theta)$ où θ est un angle qu'on definira et p le module de l'impulsion de la particule.

e) En absence de forces exterieures, donner l'équation d'évolution de la densité monoparticulaire et faire apparaître deux termes quon qualifiera de *terme de dérive* et de *terme de collisions*. Quel est le terme qui domine l'évolution si :
- la densité monoparticulaire est spatialement uniforme.
- la densité monoparticulaire est isotrope (en impulsion).

f) On suppose qu'à l'instant initial la température T du milieu est homogène et que la densité monoparticulaire possède des modulations spatiales de taille caractéristique Λ ; pensez par exemple au passage dans le milieu d'une onde acoustique de longueur d'onde Λ. En déduire un temps typique $\tau_{dér.}$ associé au terme de dérive. De même, si σ est la section efficace totale de collision du gaz sur les diffuseurs, en déduire un temps typique $\tau_{coll.}$ associé au terme de collisions.

g) Le *régime ballistique* est celui dans lequel le terme de dérive domine le terme de collisions. Dans quel régime sommes-nous si l'on considère par exemple le mouvement des porteurs de charge dans la base d'un transistor dont l'épaisseur est inférieure au libre parcours moyen ? De même, dans quel régime sommes-nous si l'on considère un conducteur soumis à un champ électrique hyperfréquence dont la période T est petite devant le temps de collision ?

h) On se place dans le cas où la densité monoparticulaire est spatialement homogène et où la section efficace différentielle est isotrope comme dans le cas de la collision de sphères dures. On introduit alors la *probabilité totale de transition par unité de temps* : $\mathcal{W}(p) = \int d^3\,\vec{p'}\; W(p,\theta)\;\delta(\frac{\vec{p'}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^2}{2m})$. Montrer alors que la densité monoparticulaire f obéit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathcal{W}(f - < f >) \tag{1}$$

où $< f >$ est la moyenne de la densité monoparticulaire sur les directions de $\vec{p}$. Après avoir résolu cette équation, montrer que la distribution monoparticulaire relaxe vers une distribution isotrope en impulsion sur des temps de l'ordre de l'inverse de la probabilité totale de transition. Incidement, comment est-elle reliée au temps de collision introduit plus haut ?

En fait nous venons de montrer que l'on ne rejoint pas l'état d'équilibre local mais seulement un état isotrope en impulsion. Cela tient essentiellement à une limitation du modèle de Lorentz : on ne prend pas en compte les échanges d'énergie avec les cibles qui sont considérées comme extérieures au système mais qui pourtant assurent la thermalisation de l'ensemble (cf. modèle de Drude). En toute rigueur il faudrait utiliser l'équation de Boltzmann avec deux types de particules mais c'est beaucoup plus lourd.

i) La remarque précédente justifie l'utilisation d'une hypothèse simplificatrice du terme de collisions appellée *hypothèse du temps de relaxation* : puisque l'effet du terme de collision est de ramener le système à l'équilibre local f_0 en un temps de l'ordre de τ on pose $I_{coll.}(f) = -\frac{1}{\tau}(f - f_0) = -\mathcal{W}(f - f_0)$. Montrer que l'évolution se déroule en deux temps : (i) le système se rapproche très rapidement de léquilibre local sous l'effet du terme de collision, puis (ii), en posant $f = f_0 + f_1$ avec $f_1 \ll f_0$ (methode de *Chapman-Enskog*), le terme de dérive entre en jeu, la petitesse de f_1 étant compensée par l'importance de la probabilité totale de transition par unité de temps $\mathcal{W}$. En déduire, dans le *régime d'équilibre local*, l'expression de la densité monoparticulaire f en fonction de la densité monoparticulaire déquilibre f_0.

j) En déduire que dans les deux exemples évoqués au g) on ne relaxe jamais vers l'équilibre local.

Exercice 7.2 : calcul de la conductivité thermique dans l'approximation du temps de relaxation (*d'après [2] Ch. 19*)

Nous allons calculer, pour un fluide peu dense (hypothèse fondamentale de l'établissement de l'équation de Boltzmann), le coefficient de réponse linéaire au transport dénergie. On considèrera un fluide de particules sans interactions, sans mouvement macroscopique et plongé dans aucun champ exterieur de sorte que ce coefficient s'identifie à la conductivité thermique λ telle qu'elle apparaît dans la loi de Fourier. On rappelle que, à l'ordre le plus bas du developpement de Chapman-Enskog on retrouve les équations du fluide parfait. On notera p, T et n la pression, la température et la densité du fluide. On introduira de plus $\beta = 1/k_B T$.

a) En **régime stationnaire**, on considère que le milieu est le siège d'un gradient de température ou, de façon équivalente un gradient de β, dans la direction z. On a donc $\beta = \beta_0(1+\gamma z)$. Le fluide étant à la pression p **homogène** (pourquoi ?) en déduire que la densité n dépend aussi de la position.

b) Rappelez l'expression de la densité monoparticulaire d'équilibre local $f_0(\vec{r}, \vec{p}, t)$ pour un fluide de particules de masse m dans les conditions définies dans l'introduction. On choisira sa normalisation de sorte que son intégrale sur les impulsions soit égal à la densité de particules $n(\vec{r})$. En déduire son expression dans le problème qui nous concerne.

c) Pour des questions de commodité, nous écrirons le développement de *Chapman-Enskog* $f = f_0 + f_1 = f_0(1+g)$ où $|g(\vec{r}, \vec{p}) \ll 1|$. Quelle est l'expression de g dans l'approximation du temps de relaxation, temps que l'on notera τ.

d) En déduire l'expression intégrale de la densité volumique de courant thermique $\vec{j}_{th}$. On donne $\int_{\infty}^{\infty} d^3\vec{u}\ u_z^2\ \vec{u}^2(\vec{u}^2 - \frac{5}{2})e^{-\vec{u}^2} = \frac{5}{4}\pi^{\frac{3}{2}}$.

e) Comparez l'expression précédente à la loi de Fourier pour en déduire l'expression de la conductivité thermique du gaz.

f) La dépendance en température de la loi obtenue ci-dessus est trompeuse car la densité et le temps de relaxation sont fonction de la température. En assimilant ce dernier au temps de collision et en faisant un modèle de sphères dures de section efficace σ (cf. 7.1.f et TD 6.3) montrer que la conductivité thermique croit comme la racine carrée de la température. Cela est bien vérifié pour les gaz rares ; par contre, on trouve une croissance plus rapide pour les gaz réels. Quelle explication proposeriez vous à ce phénomène ?

g) Au a) nous avons supposé que la pression était homogène. Que se passerait-il si nous supposions *a contrario* que c'est la densité du fluide qui est homogène ?

Références

[1] R. Balian, *Physique statistique et thermodynamique hors d'équilibre*, Ellipses, ?, ?.

[2] G. H. Wannier, *Statistical Physics*, Dover, New York, (1966).